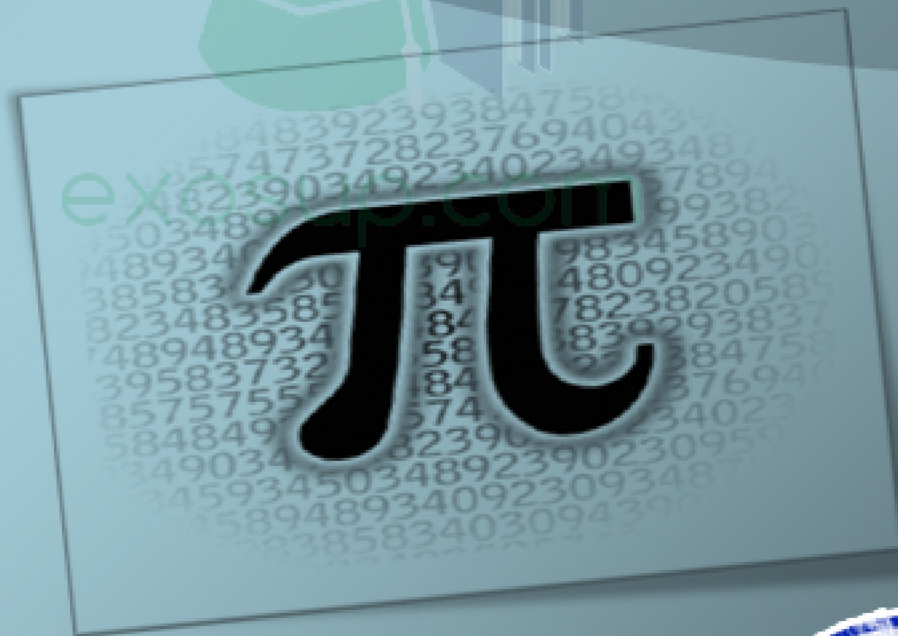
جامعة شعيب الدكالي
كلية العلوم
الجديدة



CORRECTION DES TD

ALGÈBRE 2

SMPC2





club najah

إعداد نادي النجاح

2015 - 2016

clubnajah.blogspot.com



/ succes.club

exosup.com
page facebook



تمارين الأعمال التوجيهية لسنة 2014/2013 رفقة التصحيح

من جمع وترتيب نادي النجاح

تشكراتنا لكل من ساهم من قريب أو بعيد في إنجاز هذا العمل وأخص بالذكر الطالبة للمساهمة في إعداد هذا العملآسية عاطف

عن المكتب المسير للنادي



Email: Clubnajah2013@gmail.com

www.clubnajah.blogspot.com

www.facebook.com/succes.club

exosup.com page facebook

Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques
El Jadida

Année Universitaire : 2013/2014
Filières SMPC2

Série 1 d'algèbre 2

Exercice 1.

Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f_1(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$.

$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f_2(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$.

× $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f_3(x, y, z) = (xy, x, y)$ → produit mixte .

$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par : $f_4(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y)$.

× $f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f_5(x, y, z) = (x + 1, 5y, x + y)$ → affine = translation

× $f_6 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f_6(x, y, z) = (|x|, 0)$.

~~$f_7 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f_7(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$.~~

Exercice 2.

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2. Montrer que les transformations suivantes sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$:

$g_1 : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $g_1(P) = (X + 1)P'$.

$g_2 : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $g_2(P) = P + (1 - X)P'$.

$g_3 : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $g_3(P) = (1 - X)P' + 2P''$.

Exercice 3.

Pour les applications linéaires de l'exercice 1 et l'exercice 2, déterminer $\mathrm{Ker} f_i$ et $\mathrm{Im} f_i$. En déduire si f_i est injective, surjective, bijective.

Exercice 4.

Soit g une application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $g(P) = (P(-1), P(1))$.

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer une base du noyau et déterminer l'image de g.
3. Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$h(P) = (P(-1), P(1))$. Montrer que h est bijective.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (-2x + 4y + 4z, -x + z, -2x + 4y + 4z)$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) A-t-on $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?



exosup.com page facebook

Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques
El Jadida

Année Universitaire : 2013/2014
Filières SMPC2

Série 2 d'algèbre 2

Exercice 1 (Matrices de Pauli).
Les matrices de Pauli, développées par Wolfgang Pauli, sont définies comme l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre 2 suivantes :
$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Elles sont utilisées en mécanique quantique dès 1927 pour représenter les observables quantiques.
1) Calculer les commutateurs suivants :
$[\sigma_x, \sigma_y] = \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x$, $[\sigma_y, \sigma_z] = \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y$ et $[\sigma_z, \sigma_x] = \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z$.
2) Soit $\sigma = {\sigma_x}^2 + {\sigma_y}^2 + {\sigma_z}^2$, calculer $[\sigma^2, \sigma_x] = \sigma^2\sigma_x - \sigma_x\sigma^2$.

Exercice 2 (Extrait de l'examen de la session de rattrapage année 2013/2014).
Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que $T = D + N$ avec D une matrice diagonale et N une matrice dont la diagonale est nul.
2) Calculer N^2 et en déduire N^k pour $k \geq 2$.
3) Calculer DN et ND et en déduire T^n en fonction de N, D et n.
4) Calculer T^n en fonction de n uniquement.

Exercice 3.
Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible ou non. Dans le cas où la matrice est inversible, calculer son inverse :
$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et
$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$. Refaire cette question, en utilisant la méthode du déterminant.

Exercice 4.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & cosa & cos2a \\ cosa & cos2a & cos3a \\ cos2a & cos3a & cos4a \end{pmatrix}.$$



exosup.com page facebook

Exercice 5.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $rg(A) > 0$.
2) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $rg(A) = 2$?

Exercice 7 (Extrait de l'examen de la session de rattrapage année 2012/2013).
On considére les deux applications suivantes :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad$ $(x, y) \longrightarrow (x+y, x-y, 2x+3y)$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad$ $(x, y, z) \longrightarrow (-x-y+2z, 3x-5y+6z)$.

Soient $B_2 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base canonique $\mathbb{R}^2$ et $B_3 = \{(v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1) a)Montrer que f et g sont des applications linéaires.
b) Donner les matrices suivantes :

$$M(f : B_2, B_3), M(g : B_3, B_2), M(f \circ g : B_3, B_3) \text{ et } M(g \circ f : B_2, B_2).$$

c) En déduire les expressions de $f \circ g(x, y, z)$ et de $g \circ f(x, y)$.
d) Déterminer $Ker(f)$, $Im(f)$, $Ker(g)$, et $Im(g)$.
2) On pose

$$f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 - e_2,\ w_1 = v_1 - v_2 + v_3,\ w_2 = v_1 + v_2 - v_3 \text{ et } w_3 = -v_1 + v_2 + v_3.$$

Montrons que $B_2' = \{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $B_3' = \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) a) Donner la matrice P de passage de la base B_2 à la base B_2' et calculer P^{-1}.
b) Donner la matrice Q de passage de la base B_3 à la base B_3' et calculer Q^{-1}.
4) Ecrire les matrices suivantes :
a) $M(f : B_2', B_3)$; b)$M(f : B_2', B_3')$; c)$M(g : B_3', B_2')$ et d) $M(f \circ g : B_3', B_3')$.
5) Résoudre les systèmes suivants :
a) $f(x, y) = (a, b, c)$; b) $f(x, y, z) = (a, b)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.



exosup.com page facebook

Université Chouaïb Doukkali
Département de Mathématiques
El Jadida

Année Universitaire : 2013/2014
Filière SMPC2

Algèbre 2
Série 3

Exercice 1. *Calculer les déterminants des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} \quad ; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^2 & 0 & z^2 \\ 1 & y^2 & z^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. *Calculer le rang des matrices suivantes par les déterminants :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad ; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Résoudre les systèmes suivants par la méthode des déterminants :*

$$1/ \begin{cases} 3x + y + 5z = a \\ -x + y + 5z = b \\ x - y - z = c \end{cases}, \quad 2/ \begin{cases} -x + y + az = a \\ x - 4y + bz = -1 \\ x - ay - abz = ab \end{cases} \quad 3/ \begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ x + 2y + 3z = a \\ 3x + 5y + 8z = 2 \\ 5x + 9y + 14z = b \end{cases}$$

a, b *et* $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (m+1)x + 2y + 4z = 2 \\ 4x + my + 5z = 3 \\ x + my + 2z = 1 \end{cases}$$



exosup.com
page facebook

Exercice 4. *On considère les matrices siuvantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \quad ; B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \quad et\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et\ V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. **a/** *Vérifier que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de A.*

   b/ *A quelle valeurs propres sont-ils associés ?*

   c/ *Montrer que ces valeurs propres sont les racines du polynome* $P_A(X) = \det(A - XI_3)$

2. **a/** *Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}*

   b/ *Calculer $P^{-1}AP$, on pose $D = P^{-1}AP$.*

   c/ *Calculer $P^{-1}BP$, on pose $\Delta = P^{-1}BP$.*

3. *On se propose de calculer la suite des matrices colonnes X_n définie par :*

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et\ X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n ; \forall_n \in \mathbb{N}$$

Pour étudier X_n on pose $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$.

   a/ *Calculer Y_0 et Y_1*

   b/ *Montrer que $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$*

   c/ *Montrer que $U_{n+2} = U_{n+1}, V_{n+2} = 4V_n$ et $W_{n+2} = -4W_{n+1} - 4W_n$.*

   d/ *En déduire l'expression explicite de U_n, V_n et W_n en fonction de n.*

4. *Donner finalement l'expression de la matrice X_n en fonction de n.*



exosup.com page facebook

Exercice 5. *Trigonaliser dans $\mathbb{R}$ les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad et\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. *On considère l'application linéaire :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow R^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (7x + 3y - 4z, -6x - 2y + 5z, 4x + 2y - z) \end{aligned}$$

1. *Donner la matrice A dans la base B canonique de $\mathbb{R}^3$*
2. *Calculer le polynômee caractéristique de A.*
3. *Déterminer les deux valeurs propres de A notées λ et λ_2 tel que $(\lambda_1 \langle \lambda_2)$*
4. *Trouver un vecteur u tel que $E(\lambda_2) = sev\langle u \rangle$, calculer $\dim E(\lambda_2)$.*
5. *Trouver un vecteur v tel que $E(\lambda_1) = sev\langle v \rangle$, en déduire $\dim E(\lambda_1)$.*
6. *Trouver un vecteur w telq ue $\{v, w\}$, soit une base de $\ker(A - \lambda, I)^2$.*
7. *Montrer que $B' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
8. *Déterminer la matrice $P_{B'B}$ et la matrice $P_{BB'}$.*
9. *Calculer $f(w)$ en focntion de v et w et en déduire la matrice de f dans la base B' notée $B = M(f, B', B')$, quelle relation existe entre A et B ?.*
10. *Calculer A^n en utilisant l'exercice 2 série 2.*



exosup.com page facebook

Série 1

المكتبة المسير لجنة العلوم

Exercice 1 :

* $f_1(x,y,z) = 2x - 3y + 4z$

Soit $X\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $X'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$f_1 = (X+X') = f_1\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$

$f_1 = 2(x+x') - 3(y+y') + 4(z+z')$

$= 2x + 2x' - 3y - 3y' + 4z + 4z'$

$= (2x - 3y + 4z) + (2x' - 3y' + 4z')$

$= f_1(X) + f_1(X')$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $f_1(\alpha X) = \begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\\ \alpha z\end{pmatrix}$

$f_1 = 2(\alpha x) - 3(\alpha y) + 4(z\alpha)$

$= \alpha(2x - 3y + 4z) = \alpha f_1(x,y,z)$

C'est une AL.

(*) $f_2(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y)$

Soit $X\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $X'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$f_2(X+X') = [2(x+x') + (y+y') + (z+z'),$
$(y+y') - (z+z'), (x+x') + (y+y')]$

$f_2 = (2x+y+z, y-z, x+y) +$
$(2x'+y'+z', y'-z', x'+y')$
$= f_2(X) + f_2(X')$.

$\alpha \in \mathbb{R}$

$f_2(\alpha X) = (2\alpha x + \alpha y + \alpha z, \alpha y - \alpha z, \alpha x + \alpha z)$

$= \alpha(2x + y + z, y - z, x + z)$

$= \alpha f_2(X)$

C'est une AL.

(*) $f_3(x,y,z) = (xy, x, y)$

$\Rightarrow$ on prend $f(2X) = f\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$

$= (2x.2y, 2x, 2y) = (4xy, 2x, 2y)$

$\neq 2f_3(X)$

$\Rightarrow 2(1,1,0) = (2,2,0)$

* $f_3(2(1,1,0)) = f_3(2,2,0)$

$f_3 = (4, 2, 2)$

* $2f_3(1,1,0) = 2(1,1,1) = (2,2,2)$
$\neq (4,2,2)$.

$f_3(2(1,1,0)) \neq 2f_3(1,1,0)$
n'est pas AL.

(*) $f_5(x,y,z) = (x+1, 5y, x+y)$

AL $\Longleftrightarrow$ $f(0) = 0$

$f_5(0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$

f_5 n'est pas AL.

(*) $f_6(x,y,z) = (|x|, 0)$

on pose : $U = (1,0,0)$ $V = (-1,0,0)$

$f_6(U+V) = f(0,0,0) = (0,0)$

$f_6(U) + f_6(V) = f(1,0,0) + f(-1,0,0)$
$= (1,0) + (1,0) = (2,0)$

on a : $(2,0) \neq (0,0)$

$f_6(U+V) \neq f_6(U) + f_6(V)$

f_6 n'est pas application linéaire

Exercice 3

Rappel : Soient E et F deux ev sur $\mathbb{R}$ et Soit $E \longrightarrow F$ une AL.

$\operatorname{Ker} f = \{U \in E \,/\, f(U) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$

(*) $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f_1 \Longleftrightarrow f_1 = 0$

$2x - 3y + 4z = 0$

$x = \frac{3}{2}y - \frac{4}{2}z$

$(x,y,z) = (\frac{3}{2}y - 2z, y, z)$

$= (\frac{3}{2}y, y, 0) + (-2z, 0, z)$

$= y(\frac{3}{2}, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$

exosup.com page facebook

Algèbre

donc

$\ker f_1 = sev \langle \{(3/2, 1, 0), (-2, 0, 1)\} \rangle$

$(\frac{3}{2}, 1, 0)(-2, 0, 1)$ est une base de $\ker f_1 \Rightarrow \dim \ker f_1 = 2$.

⊛ $\ker f_2$:

$(x, y, z) \in \ker f_2 \Leftrightarrow f_2 = 0$

$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ y = -x \end{cases}$

$\Rightarrow (x, y, z) = (-y, y, y) = y(-1, 1, 1)$

$\ker f_2 = sev \langle (-1, 1, 1) \rangle$

⊛ $\ker f_4$:

$(x, y, z) \in \ker f_4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\ker f_4 = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

f_4 est injective

Ex 4

$1 = (1, 0, 0 \ldots 0 \ldots)$

$X = (0, 1, 0 \ldots)$

$X^2 = (0, 0, 1, 0 \ldots)$

$\mathbb{R}[X] = sev \langle 1, X, X^2 \ldots X^n \ldots \rangle$

$\mathbb{R}_n[X] = sev \langle 1, X, \ldots X^n \rangle$

$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$

$\tilde{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$\tilde{P}(2) = a_0 + a_1 2 + \ldots + a_n (2)^n$

$\tilde{P}(2) = a_0 + a_1 2 + \ldots + a_n (2)^n$

$g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$P \longrightarrow g(P) = (\tilde{P}(-1), \tilde{P}(1))$

1/ Mq g est AL :

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$

$g(\alpha P + \beta Q)$

$= [(\alpha P + \beta Q)(-1), (\alpha P + \beta Q)(1)]$

$= [\alpha P(-1) + \beta Q(-1), \alpha P(1) + \beta Q(1)]$

$= \alpha(\tilde{P}(-1), \tilde{P}(1)) + \beta(Q(-1), Q(1))$

$= \alpha g(P) + \beta g(Q)$

donc g est un AL

2/ a) $\ker g$:

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

$P \in \ker g \Leftrightarrow g(P) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow (P(-1), P(1)) = (0, 0)$

$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$

$n = 3 \quad p = 2$

$② - ① \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 + a_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -a_0 \end{cases}$

$P \in \ker g \Leftrightarrow P(X) = a_0(1 - X^2)$

$\ker g = sev \langle (1 - X^2) \rangle$

$\dim \ker g = 1$.

b) $\mathrm{Im}\, g$:

$\dim \mathrm{Im}\, g = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \ker g$

$= 3 - 1 = 2$.

on sait $\{1, X, X^2\}$ est la base Canonique $\mathbb{R}_2[X]$

$\mathrm{Im}\, g = sev \langle g(1), g(X), g(X^2) \rangle$.

$= sev \langle (\tilde{1}(-1), \tilde{1}(1)), (\tilde{X}(-1), \tilde{X}(1)); \tilde{X}^2(-1), \ldots$

$= sev \langle (1, 1), (-1, 1), (1, 1) \rangle$

$= sev \langle (1, 1), (-1, 1) \rangle$

exosup.com
page facebook

$\{(1,1),(-1,1)\}$ est 1 base de Img

c)_ injective, surjective :

⊛ $\ker g = sev\langle(1-X^2)\rangle \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$

g n'est pas injective

⊛ $Img \subset \mathbb{R}^2$

$\dim Img = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow Img = \mathbb{R}^2$

donc g surjective

3°/ $h : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$P \longmapsto h(P) = (\tilde{P}(-1), \tilde{P}(1))$

Mq h est bijective

* Ker h :

$P(X) = a_0 + a_1 X \in \mathbb{R}_1[X]$

$P \in \ker h \Leftrightarrow h(P) = (0,0)$

$\Leftrightarrow (a_0 - a_1, a_0 + a_1) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 = 0 \\ a_0 + a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ a_0 = a_1 = 0$

$P \in \ker h \Leftrightarrow P(X) = 0_{\mathbb{R}_1[X]}$

$\ker h = \{0_{\mathbb{R}_1[X]}\} \Rightarrow h$ injective

or : $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

h injective $\Rightarrow$ h bijective.

نادي العلوم المكتب المسير كلية العلوم

Ex 5

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (-2x+4y+4z ; -x+z ; -2x+4y+4z)$

a)_ Mq f est linéaire :

⊕ $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

⊕ $f(X + \alpha Y) = f(X) + \alpha f(Y)$

⊕ $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$

$f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

Soit $X = (x_1, x_2, x_3)$

$Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$f(X + \alpha Y) = f(x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2, x_3 + \alpha y_3)$

$= [-2(x_1+\alpha y_1) + 4(x_2 + \alpha y_2) + 4(x_3 + \alpha y_3),$
$-(x_1 + \alpha y_1) + (x_3 + \alpha y_3),$
$-2(x_1+\alpha y_1) + 4(x_2+\alpha y_2) + 4(x_3+\alpha y_3)]$

$= [-2(x_1) + 4x_2 + 4x_3 , -x_1 + x_3,$
$-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] +$
$[\alpha(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3,$
$-2y_1 + 4y_2 + 4y_3]$

$= f(x_1, x_2, x_3) + \alpha f(y_1, y_2, y_3)$

$= f(X) + \alpha f(Y)$

Donc f est une Application linéaire

b°/ ⊛ Ker f :

$(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\begin{cases} -2x + 4y + 4z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ -2x + 4y + 4x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = z \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$

$X \in \ker f \Leftrightarrow X = x(1, -\frac{1}{2}, 1) \quad x \in \mathbb{R}$

$\ker f = sev\langle(1, -1/2, 1)\rangle$

$(1, -1/2, 1)$ non nul donc est libre et génératrice

$\Rightarrow (1, -1/2, 1)$ est base de Ker f

$\dim \ker f = 1$ (f n'est pas injective)

⊛ Im f :

$\dim Im f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f$
$= 3 - 1 = 2$.

Soit $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$Im f = sev\langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle$

$= sev\langle \underset{u_1}{(-2,-1,-2)}, \underset{u_2}{(4,0,4)}, \underset{u_3}{(4,1,4)} \rangle$

on a : $u_3 = -u_1 + \frac{1}{2}u_2$

$Im f = sev\langle u_1, u_2 \rangle$

$\{u_1, u_2\}$ est 1 base de Im f.

f n'est pas surjective.

exosup.com page facebook

Rappel :

$E = sev\langle U_1, U_{i-1}, U_{i+1} \dots U_n \rangle$

* si $U_i = 0$

$E = sev\langle U_1, U_i, U_{i+1} \dots U_n \rangle$

* Si $U_i = \alpha_1 U_1 + \alpha_{i-1} U_{i-1} + \alpha_{i+1} U_{i+1} \dots \alpha_n U_n$

$E = sev\langle U_1 \dots U_{i-1}, U_{i+1}, U_n \rangle$

c/ $\ker f \oplus \mathrm{Im} f \overset{?}{=} \mathbb{R}^3$

Rappel : E ev

F, G 2 sev de E

$F \oplus G = E \Rightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ F + G = E \end{cases}$

F et G sont en somme direct.

(*) $\mathrm{Im} f \cap \ker f = ?$

Soit $X = (x, y, z) \in \mathrm{Im} f \cap \ker f$

$\begin{cases} X \in \mathrm{Im} f \\ X \in \ker f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} X = \alpha U_1 + \beta U_2 \\ X = \gamma(2, -1, 2) \end{matrix}$

$\gamma(2, 1, 2) = \alpha_1(2, 1, 2) + \beta(1, 0, 1)$

$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha \quad\quad + \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = -4\alpha \end{cases}$

$X \in \ker f \cap \mathrm{Im} f \Leftrightarrow X = -\alpha(2; 1, 2)$

$\ker f \cap \mathrm{Im} f = sev\langle (2, -1, 2) \rangle$

$= \ker f \neq \{(0,0,0)\}$

donc $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ ne sont pas en somme direct.



Série 2

Ex 1

(1) $- [\sigma_x \sigma_y] = \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x$

$\sigma_x \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$\sigma_y \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$[\sigma_x \sigma_y] = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$

$- [\sigma_y, \sigma_z] = \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y$

$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$

$- [\sigma_z, \sigma_x] = \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $- \sigma = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$

$\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$\sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma = 3 I_2$.

$- [\sigma^2, \sigma_x] = \sigma^2 \sigma_x - \sigma_x \sigma^2$

$\sigma^2 = (3 I_2)^2 = 9 I_2$.

$[\sigma^2, \sigma_x] = 9 I_2 \sigma_x - \sigma_x (9 I_2)$

$= 9 I_2 \sigma_x - 9 \sigma_x I_2$

$= 0$

Exercice 2

$\begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$: diagonale

$\begin{pmatrix} \blacktriangle & 0 \end{pmatrix}$: inférieur

$\begin{pmatrix} 0 & \blacktriangledown \end{pmatrix}$: supérieur

① - Mq : $T = D + N$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = T$$

② - Calcul N^2 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice nulle.

$\Rightarrow N^k = 0$ pour $k \geq 2$

③ - Calcul ND , ND :

- $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$DN = ND = N$.

exemple :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 2d_1 & 3d_1 \\ 4d_2 & 5d_2 & 6d_2 \\ 7d_3 & 8d_3 & 9d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 \\ 4d_1 & 5d_2 & 6d_3 \\ 7d_1 & 8d_2 & 9d_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T = D + N$

$T^n = (D+N)^n$

La matrice N et D commutent ($ND = DN$)

on peut utiliser la formule du Bynome.

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k}$$

or $N^k = 0$ pour $k \geq 2$

$$T^n = C_n^0 N^0 D^n + C_n^1 N D^{n-1}$$
$$= D^n + nND^{n-1}$$

Rq : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Rq : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$

$$D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^2 \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{pmatrix} \quad \forall k.$$

④ - Calcul T^n :

on a : $T^n = D^n + nND^{n-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice triangulaire supérieur

Exercice 3

A inversible si $\exists B$ tq

$AB = BA = I_n$

on note : $B = A^{-1}$

- si A inversible

$\forall b$ le système $AX = b$

admet une soulution unique

- $A.X = 0 \Leftrightarrow X = 0$

n de ligne : espace d'arrivé
n de colonne : espace de départ

$A\begin{pmatrix}3&0&2\\5&0&7\\1&0&5\end{pmatrix}$

$AX = Y$

$3x_1 + 2x_3 = y_1$
$5x_1 + 7x_3 = y_2$
$x_1 + 5x_3 = y_3$

Ce système admet soit une infinité de solution soit aucune.

A non inversible.

$B\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $BX = Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

Rappel : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$

$\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = y_1\\ x_2 + x_3 = y_2\\ x_3 = y_3\end{cases}$ $\begin{cases}x_3 = y_3\\ x_2 = y_2 - y_3\\ x_1 = y_1 - y_2 + y_3 - y_3 = y_1 - y_2\end{cases}$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

Méthode de gauss :

$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \rightarrow$
$3x_1 + x_2 + x_3 = 6$



Rq : Si $B = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ (colonnes B^1, B^2, B^3)

$AB = (AB^1, AB^2, AB^3)$

pour trouver les colonnes de A^{-1}
$(1, X, X^2)$:

$AX^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $AX^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $AX^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1/2&1&1&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\3&1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$C = \begin{pmatrix}2&\sqrt{3}&7\\0&0&5\\0&0&1\end{pmatrix}$

C n'admet pas de solution
C^{-1} n'exite pas.

Autrement C est une matrice triangulaire sup
$\det(C) = 2\times 0\times 1 = 0$

C non inversible.

$D = \begin{pmatrix}4&3&2\\2&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$

$\begin{matrix}4&3&2\\0&-5&-2\\0&&\end{matrix}$ $2L_2 - L_1 \rightarrow L_2$
$4L_3 - L_1 \rightarrow L_3$

Méthode de déterminant

$A\begin{pmatrix}3&0&2\\5&0&7\\1&0&5\end{pmatrix}$ $\det(A) = 0$

$B\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\det(B) = 1$

B^{-1} existe.

$B^{-1} = \frac{1}{\det B} Com^T(B)$.

Rq : B^{-1} triang supérieur

$B^{-1} = \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdot&\cdot\\0&0&\cdot\end{pmatrix}$

$Com(B)_{ij} = (-1)^{i+1}\det(B_{ij})$

exosup.com page facebook

$B(ij)$ sous matrice de B où on a enlevé la iéme ligne et la jéme Colonne.

$$Com(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^tCom(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(C) = 2 \times 0 \times 1 = 0$

- $\det(D) = 0$
- $\det(E) = 16$

$$E^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex4

$$A \begin{pmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{pmatrix}$$

•

Rappel

- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{C_1+C_3}{1+\cos 2a} & \overset{C_2}{\cos a} & \overset{C_3}{\cos 2a} \\ \cos a + \cos 3a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a + \cos 4a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}$$

- $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$
- $\cos a + \cos 3a = 2 \cos a \cos 2a$
- $\cos 2a + \cos 4a = 2 \cos 3a \cos a$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\cos^2 a & \cos a & \cos 2a \\ 2\cos a \cos 2a & \cos 2a & \cos 3a \\ 2\cos 3a \cos a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos a \begin{vmatrix} \cos a & \cos a & \cos 2a \\ \cos 2a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 3a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}$$

$\Delta = 0$ (Δ = Volume) = dimension

Exercice 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$$

exosup.com
exosup.com page facebook

* $a = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & b-c \\ bc & 0 & b(b-c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b+c & b-c \\ bc & b(b-c) \end{pmatrix}$$

* $b = c$ $\quad rg(A) = 1$
* $b \neq c$ $\quad rg(A) = 2$

$$Rg(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b+c & 1 \\ bc & b \end{pmatrix} = 2$$

* $a \neq b$

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & a-c \\ bc & c & b(a-c) \end{pmatrix}$$

* $a = c$ $\quad rg(A) = 2$
* $a \neq c$ $\quad rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}$
* $b \neq c$ $\quad rg(A) = 3$
* $a \neq b \neq c$

$$\det A = (a-b)(a-c) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{vmatrix}}_{b-c}$$

$$\det A = (a-b)(a-c)(b-c)$$

Conclusion

- $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c \Rightarrow rgA = 3$
- $A = b$; $b \neq c \Rightarrow rgA = 2$
- $A = b = c \Rightarrow rg A = 1$.

Autrement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$$

exosup.com

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a-b) & (a-c) \\ 0 & 0 & (a-c)(b-c) \end{pmatrix}$$

* $a = c \rightarrow rgA = 2$
* $b = c \rightarrow rg A = 2$
* $a = b = c \rightarrow rgA = 1$
* $a \neq b \neq c \rightarrow rg A = 3$

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg A = \dim sev\langle C_1, C_2, C_3, C_4 \rangle$

$C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit linéairement indépendant

Donc $rg(A) > 0$

(2) - $rg(A) = 2$

Si $C_1, C_4 \in sev\langle C_2, C_3 \rangle$

- $C_1 \in sev\langle \{C_2, C_3\} \rangle$

$$C_1 \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$a = 2\alpha - \beta$

$\beta = 3$

$4\alpha - \beta = 5$

$\begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$ $\quad a = 1$



page facebook

Autrement 1

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1$$

• $C_4 \in sev\langle C_2, C_3 \rangle$

$$C_4 \begin{pmatrix} b \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta = -4 \\ 4\alpha - \beta = 2 \\ b = 2\alpha - \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \alpha = -1/2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Autrement 2

$$\begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a & b \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -1 & 2 & a & b \\ 0 & 2 & (a+3) & (b-4) \\ 0 & 2 & (5-a) & (2-b) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & a & b \\ 0 & 2 & (a+3) & (b-4) \\ 0 & 0 & 2(1-a) & 2(3-b) \end{matrix}$$

• $2(1-a) = 0 \longrightarrow 1 - a = 0$
$\Rightarrow a = 1$

• $2(3-b) = 0 \longrightarrow 3 - b = 0$
$\Rightarrow b = 3$

Exercice 7

1) - a) - f, g linéaires

b) - $\mathcal{M}(f, B_2, B_3)$

$$\begin{matrix} & f(e_1) & f(e_2) \\ V_1 & 1 & 1 \\ V_2 & 1 & -1 \\ V_3 & 2 & 3 \end{matrix}$$

* $\mathcal{M}(g, B_3, B_2) = M_3$

$$\begin{pmatrix} g(v_1) & g(v_2) & g(v_3) \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

* $\mathcal{M}(f \circ g, B_3, B_3)$

$g\ (\mathbb{R}^3, B_3) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}^2, B_2) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^3, B_3)$

$M_3 = \mathcal{M}(f, B_2, B_3)\,\mathcal{M}(g, B_3, B_2)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -4 & 4 & -4 \\ 7 & -17 & 22 \end{pmatrix}$$

Autrement

• $(f \circ g)(v_1) = f(g(v_1)) = f(-e_1 + 3e_2)$
$= -f(e_1) + 3f(e_2)$
$= -(V_1 + V_2 + 2V_3) + 3(V_1 - V_2 + 3V_3)$
$= 2V_1 - 4V_2 + 7V_3$

• $(f \circ g)(v_2) = -6V_1 + 4V_2 - 17V_3$

• $(f \circ g)(v_3) = 8V_1 - 4V_2 + 22V_3$

Rq : les colonnes sont les images de la base.

* $\mathcal{M}(g \circ f, B_2, B_2) = M_4$

$(\mathbb{R}^2, B_2) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3, B_3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2, B_2$

$$M_4 = M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$$



exosup.com page facebook

c) * $fog(x,y,z) =$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad Y = fog(x,y,z)$

$$Y = X.M_3 = \begin{pmatrix} 2x - 6y + 8z \\ -4x + 4y - 4z \\ 7x - 17y + 22z \end{pmatrix}$$

* $gof(x,y,z) =$

$Y' = gof(x,y,z)$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$Y' = X.M_4 = \begin{pmatrix} 2x + 6y \\ 10x + 26y \end{pmatrix}$$

2) * Mq B'_2 est base de $\mathbb{R}^2$:

$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$

$\alpha(e_1 + e_2) + \beta(e_1 - e_2) = 0$

$(\alpha + \beta)e_1 + (\alpha - \beta)e_2 = 0$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

B'_2 est une base de $\mathbb{R}^2$

* de la même manière, on montre que B'_3 est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) * $P = M(id, B'_2, B_2)$

$$P = \begin{matrix} \\ e_1 \\ e_2 \end{matrix} \begin{matrix} f_1 & f_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$P^{-1} = M(id, B_2, B'_2)$ (colonnes e_1, e_2)

$$= \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} e_1 + e_2 = f_1 \\ e_1 - e_2 = f_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e_1 = 1/2 f_1 + 1/2 f_2 \\ e_2 = 1/2 f_1 - 1/2 f_2 \end{cases}$

* $\varphi = M(id, B'_3, B_3)$

$$\varphi = \begin{matrix} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\varphi^{-1} = M(id, B_3, B'_3)$

$$= \begin{matrix} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\begin{cases} w_1 = v_1 - v_2 + v_1 & (1) \\ w_2 = v_1 + v_2 - v_3 & (2) \\ w_3 = -v_1 + v_2 + v_3 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow v_1 = 1/2 w_1 + 1/2 w_2$

$(1) + (3) \Rightarrow v_3 = 1/2 w_1 + 1/2 w_3$

$(2) + (3) \Rightarrow v_2 = 1/2 w_2 + 1/2 w_3$

$$\varphi^{-1} = \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix}$$

Remarque 1

$$\begin{array}{ccc} (E, B_1) & \xrightarrow{f(M)} & (F, B_2) \\ P \uparrow id & & \downarrow \varphi^{-1} \\ (E, B'_1) & \xrightarrow[f(M_1)]{} & (F, B'_2) \end{array}$$

- P : matrice de passage de B_1 à B'_1
- φ : matrice de passage de B_2 à B'_2

$P = (M)(id_E, B'_1, B_1)$

$\varphi = M(id_F, B'_2, B_2)$

$M_1 = \varphi^{-1} . f . P.$

Remarque 2

X exprime dans B_1

X' exprime dans B'_1

$\Rightarrow X = PX'$

exosup.com page facebook

y exprime dans B_2

y' exprime dans B'_2

$\Rightarrow \quad y = \varphi y'$

(4) * $N_1 = M(f, B'_2, B_3)$

$$\begin{array}{ccc} E, B_2 & \xrightarrow{f \; M} & F, B_3 \\ id_E \uparrow P & & id_F \downarrow \varphi^{-1} \\ E, B'_2 & \xrightarrow[f \; M']{} & F, B'_3 \end{array}$$

$N_1 = M(f, B'_2, B_3)$

$= M_1 . P$

Autrement 1

$Y = N_1 X' = N_1 P^{-1} X$

$= M_1 X$

Autrement 2

$Y = f(X) = M_1 X$

$= f(X') = N_1 X'$

$= (N_1 . P^{-1}) X$

$M_1 = N_1 P^{-1} \longrightarrow N_1 = M_1 P$.

* $N_2 = M(f, B'_2, B'_3)$

$= \varphi^{-1} . M_1 . P$

Autrement

$\varphi y' = y = M_1 X$

$= M_1 P X'$

$\varphi y' = M_1 P X'$

$y' = (\varphi^{-1} M_1 P) X'$

Ex 4

V vecteur propre $(V \neq 0)$

$\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad A.V = \lambda V$

λ : Valeur propre de A.

$AV = \lambda V \Longleftrightarrow AV - \lambda V = 0$

$\Longleftrightarrow (A - \lambda I_n) V = 0$

avec $V \neq 0$.

Si λ val propre alors :

$\det(A - \lambda I) = 0$

on construie $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

on resout $P(\lambda) = 0$.

1°/ a) - Mq V_1, V_2, V_3 vecteurs propre de A :

b) -

(*) $A.V_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = V_1$

$\lambda_1 = 1$

(*) $A.V_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0$

(*) $A.V_3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 V_3$

$\lambda_3 = -4$

b) - V_1 vecteur propre associe à la Valeur propre $\lambda_1 = 1$

- V_2 " " " $\lambda_2 = 0$

- V_3 " " " $\lambda_3 = -4$



exosup.com

page facebook

9)-

$$A - xI_3 = \begin{pmatrix} 5-x & 5 & -14 \\ 6 & 6-x & -16 \\ 5 & 5 & -14-x \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 5-x & 5 & -14 \\ 6 & 6-x & -16 \\ 5 & 5 & -14-x \end{vmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 5 & -14 \\ x & 6-x & -16 \\ 0 & 5 & -14-x \end{vmatrix} \quad (C_1 - C_2,\ C_2,\ C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 5 & -14 \\ 0 & 11-x & -30 \\ 0 & 5 & -14-x \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$= -x \begin{vmatrix} 11-x & -30 \\ 5 & -14-x \end{vmatrix}$$

$$= x\left(\left((11-x)(14-x)\right) - 150\right)$$

$$= x\left(-x^2 - 3x + 4\right)$$

* $\lambda_1 = 1 \quad P_A(1) = 1 \times (-1 - 3 + 4) = 0$

* $\lambda_2 = 0 \quad P_A(0) = 0$

* $\lambda_3 = -4 \quad P_A(-4) = -4(-16 + 12 + 4) = 0$

Rq

$$A.P = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & -4V_3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 \\ V_1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & \boxed{-4} \end{matrix}$$ valeur propre



2°) - 4°/

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

P est inversible

Les Colonnes de P sont V_1, V_2, V_3

donc $\{V_1, V_2, V_3\}$ base

Calcul P^{-1} :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \operatorname{Com}^T(P)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Autrement</u> : $P^{-1} = P_{B'B}$

$V_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$

$V_2 = e_1 - e_2$

$V_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

- $V_1 - V_3 = e_2$
- $e_1 = V_2 + e_2 = V_2 + V_1 - V_3$
- $e_3 = V_3 - e_1 - e_2 = V_3 - (V_1 + V_2 - V_3) - (V_1 - V_3)$

$= -2V_1 - V_2 + 3V_3$.

$$\begin{cases} e_1 = V_1 + V_2 - V_3 \\ e_2 = V_1 - V_3 \\ e_3 = -2V_1 - V_2 + 3V_3 \end{cases}$$

$$P_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

exosup.com

page facebook

b/ - $D = P^{-1}AP$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & AV_1 & AV_2 & AV_3 \\ V_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{matrix}$$

c/ - $\Delta = P^{-1}BP$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

③ - a/ - $Y_0 = P^{-1}X_0$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b/

$Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2}$

$= P^{-1}AX_{n+1} + P^{-1}BX_n$.

$Y_n = P^{-1}X_n \Rightarrow X_n = PY_n$

$Y_{n+2} = \underbrace{P^{-1}AP}_{D} Y_{n+1} + \underbrace{P^{-1}BP}_{\Delta} Y_n$

$Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$ (*)

c/ (*) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} U_{n+2} \\ V_{n+2} \\ W_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ 4V_n \\ -4W_{n+1} - 4W_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow U_{n+2} = U_{n+1}$

$\Rightarrow V_{n+2} = 4V_n$

$\Rightarrow W_{n+2} = -4W_{n+1} - 4W_n$.

d/ * $U_{n+2} = U_{n+1}$

$\forall n \geq 2 \quad U_n = U_1 = -1$

$Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} U_1 = -1 \\ V_1 = 0 \\ W_1 = 1 \end{matrix}$

* $V_{n+2} = 4V_n$

+ $n = 2k = 2(k-1) + 2$

$V_n = V_{2k} = V_{2(k-1)+2} = 4V_{2(k-1)}$

$\Rightarrow V_n = V_{2k} = 4^k V_0$

+ $n = 2k+1$

$V_n = V_{(2(k-1)+1)+2} = 4\, V_{2(k-1)+1}$

$= V_{2k+1} = 4^k V_1$.

$V_7 = V_{(2\times3)+1} = 4V_5 = 4 \cdot 4 V_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 V_1$

$= 4^3 \cdot V_1$.

* $W_{n+2} = -4W_{n+1} - 4W_n$

__Rappel__ : Suite récurrentes linéaire

$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$.

eq Caractéristique

$x^2 - ax - b = 0$

exosup.com page facebook

Δ ?

- $\Delta > 0$: $x_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$
- $\Delta = 0$ solution double x

$x_n = (\lambda n + \mu) x^n$.

- $\Delta < 0$ 2 solution Complexe.

$x = re^{i\theta}$, $\bar{x}$

$x_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$.

$\omega_{n+2} = -4 W_{n+1} - 4 W_n$

éq Caracté :

$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

$x = -2$ racine double

$\Rightarrow n \geq 2$ $\quad W_n = (\lambda n + \mu)(-2)^n$

- $W_0 = (\lambda \times 0 + \mu)(-2)^0$

$= \mu (-2)^0 = 2$

$\Rightarrow \mu = 2$.

- $W_1 = 1 = (\lambda + \mu)(-2)^1$

$= -2\lambda - 2\mu$

$-2\lambda = 5 \quad \Rightarrow \lambda = -5/2$

$W_n = \left(-\frac{5}{2} n + 2\right)(-2)^n$

$\Rightarrow Y_n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \left(-\frac{5}{2} n + 2\right)(-2)^n \end{pmatrix}$

④ - $Y_n = P^{-1} X_n$

$X_n = P Y_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \left(-\frac{5}{2} n + 2\right)(-2)^n \end{pmatrix}$

exosup.com

Exercice 6

1) - Matrice A :

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$f(e_1)$ $f(e_2)$ $f(e_3)$

2) - $P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I)$

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & 3 & -4 \\ -6 & -2-\lambda & 5 \\ 4 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$C_1 - 2C_2 \quad C_2 \quad C_3$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -4 \\ -2+2\lambda & (-2-\lambda) & 5 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1-\lambda \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & (-2-\lambda) & 5 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1-\lambda \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 4-\lambda & -3 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} L_2 + 2L_1$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)\left[(4-\lambda)(-1-\lambda) + 6\right]$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

$= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$

$= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$

page facebook

- $\lambda_1 = 1$: Valeur propre double
- $\lambda_2 = 2$: Valeur propre simple

(4) (*)

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad X \in E_2 \Leftrightarrow AX = 2X$

$\Leftrightarrow (A-2I)X = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 5L_2+6L_1 \\ 5L_3-4L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \Rightarrow -2y + z = 0$

$z = 2y$

$L_3 \Rightarrow 5x + 3y - 4z = 0$

$5x + 3y - 8y = 0$

$5x - 5y = 0$

$x = y$.

$X \in E_2 \quad X \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E_2(\lambda_2) = sev \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \dim E_2 = 1$



(*) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad X \in E_1 \Leftrightarrow AX = X$

$\Leftrightarrow (A - I)X = 0$

$E_1 = \ker(A - \lambda_1 I)$

$= \ker(A - I)$

$X \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y - 4z = 0 \\ -6x - 3y + 5z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 0$

$\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \quad \bullet\ y = -2x$

$X = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_1(\lambda_1) = sev \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim E_{\lambda_1} = 1$

λ_1 est multiplicité 2

A n'est pas diagonalisable.

(5). $X \in \ker(A - I)^2$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 = L_1 \\ L_3 = 2L_2 \end{array}$$

$X \in \ker(A - I)^2$

$\Leftrightarrow 2x + y - z = 0$

c'est eq d'un plan.

exosup.com

page facebook

$y = -2x + z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x+z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\ker (A-I)^2 = \text{sev}\langle\{V, \omega\}\rangle$

(7) -

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

C'est une base de $\mathbb{R}^3$

(8) -

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_{B'B} = ?$

$$\begin{cases} U = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ V = e_1 - 2e_2 \\ \omega = e_2 + e_3 \end{cases}$$

expression de e_i en fonction de U, V, ω.

$e_1 = 2U - V - 4\omega$

$e_2 = U - V - 2\omega$

$e_3 = -U + V + 3\omega$

$$P_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = P_{BB'}^{-1}$$

(9) - $B = M_f(B')$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(colonnes : $f(U)$, $f(V)$, $f(\omega)$; lignes : U, V, ω)

$f(\omega) = (-1, 3, 1)$

$= -V + \omega =$

$= U(0) + V(-1) + \omega(1)$

$B = P_{BB'}^{-1} \, A \, P_{BB'}$

$= P_{B'B} \, A \, P_{BB'}$

$A = P_{BB'} \, B \, P_{B'B}$

$A^n = P_{BB'} \, B^n . P_{B'B}.$

<u>Remarque</u>

$B = D + N$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ex 5

① - Mq f est linéaire

f est linéaire

② ⊛ $\ker f$:

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y+4z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -\frac{1}{2} z \end{cases}$

$X = (z, -\frac{1}{2}z, z)$

$= z(1, -\frac{1}{2}, 1)$.

$\ker f = sev\langle (1, -\frac{1}{2}, 1) \rangle$

⊛ $\mathrm{Im} f$:

$f(e_1) = (-2, -1, -2)$

$f(e_2) = (4, 0, 4)$

indépendants

$\{f(e_1), f(e_2)\}$ base de $\mathrm{Im} f$

Autrement 1

$f(e_1) = (-2, -1, -2)$

$f(e_2) = (4, 0, 4)$

$f(e_3) = (4, 1, 4)$

$f(e_3) = -f(e_1) + \frac{1}{2} f(e_2)$

$\mathrm{Im} f = sev\langle (-2,-1,-2), (4,0,4) \rangle$

Autrement 2

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y+4z=a \\ -x+z=b \\ -2x+4y+4z=c \end{cases}$

$\boxed{a=c}$

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$



$\Rightarrow P(X) = a(X-1)(X+1)$

$= a(X^2-1)$

Autrement :

$P(X) = a + bX + cX^2$

$(\{1, X, X^2\})$ base de $\mathbb{R}_2[X]$

$P \in \ker g \Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a+c=0 \end{cases}$

$P(x) = a - aX^2 = a(1-X^2)$.

$\ker g = sev\langle \{X^2-1\} \rangle$

$\dim \ker g = 1$.

⊛ $\mathrm{Im} g$:

$\mathrm{Im} g$ sev de $\mathbb{R}^2$

$\dim \mathrm{Im} g = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

donc $\mathrm{Im} g = \mathbb{R}^2$

$F \subset E$; $\dim F = \dim E$

$\Rightarrow F = E$

③ - Mq h est bijective

$h : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$h(P) = (P(-1), P(1))$.

$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$ $\quad P = aX + b$

$\begin{matrix} P(-1) = -a+b \\ P(1) = a+b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=0 \\ a+b=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = b \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$

$\ker h = 0$

Donc h est une application injective $h : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\dim \mathbb{R}_1[X] = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

. h est bijective.

exosup.com page facebook

$= (a + bX + CX^2) + b + 2CX - bX - 2CX^2$

$= (a + b) + 2CX - CX^2$

Exemple :

$P(X) = 3X^2 + 4X - 5$

$a = -5 \quad b = 4 \quad C = 3$

$g_1(P)(X) = -1 + 6X - 3X^2$

$P \in \ker g_2 \Leftrightarrow g_2(P) = 0$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2C = 0 \\ -C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ b = -a \end{cases}$

$P(X) = a - aX + 0X^2 \quad a \in \mathbb{R}$

$= a(1 - X)$

Si $P_1(X) = 1 - X$

$P \in \ker g_2 \Leftrightarrow P = aP_1 \quad a \in \mathbb{R}$

Ex 4

$g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$P \in \mathbb{R}_2[X] \quad g(P) = (P(-1), P(1))$

1) $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$g(P_1 + P_2) = ((P_1 + P_2)(-1), (P_1 + P_2)(1))$

$= (P_1(-1) + P_2(-1), P_1(1) + P_2(1))$

$= (P_1(-1), P_1(1)) + (P_2(-1), P_2(1))$

$= g(P_1) + g(P_2)$

$g(\alpha P) = \alpha g(P)$

2) a) $P \in \ker g$

$\Leftrightarrow g(P) = 0$

$\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (X+1) / P \\ (X-1) / P \end{cases}$

$(X+1)(X-1) / P$

$d^\circ P \leq 2$



$* g_1(P) = (X+1)P'$

$\varphi = g_1(P) \quad \varphi(X) = (X+1)P'(X)$

$P'(X) = b + 2CX$

$\varphi(X) = (X+1)(b + 2CX)$

$= bX + 2CX^2 + b + 2CX$

$= b + (2C + b)X + 2CX^2$

$P \in \ker g_1 \Leftrightarrow g_1(P) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2C + b = 0 \\ 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = C = 0$

$\Rightarrow P(X) = a \quad \forall X.$

$\dim \ker g_1 = 1.$

$* \quad \varphi \in \operatorname{Im} g_1 \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_2[X]$

tq $\varphi = g_1(P)$

$\Leftrightarrow \varphi(X) = b + (b + 2C)X + 2CX^2$

$\varphi(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$

$\varphi = g_1(P)$

$\begin{cases} \alpha = b \\ \beta = b + 2C \\ \gamma = 2C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = b \\ \beta = b + \gamma \\ \gamma = 2C \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = b \\ \gamma = 2C \\ \beta = \alpha + \gamma \end{cases}$

$\varphi \in \operatorname{Im} g_1 \Leftrightarrow \alpha - \beta + \gamma = 0$

$\varphi(X) = \alpha + (\alpha + \gamma)X + \gamma X^2$

$= \alpha(1 + X) + \gamma(X + X^2)$

on pose : $P_1 = 1 + X$

$P_2 = X + X^2$

$\varphi(X) = \alpha P_1 + \gamma P_2$

$\operatorname{Im} g_1 = \operatorname{sev} \langle P_1, P_2 \rangle$

$* g_2 = P + (1 - X)P'$

$P(X) = a + bX + CX^2$

$P'(X) = b + 2CX$

$P(X) + (1 - X)P'(X)$

$= (a + bX + CX^2) + (1 - X)(b + 2CX)$

exosup.com
page facebook

Soit $(a,b,c) \in Im f_2$

$$\begin{cases} 2x+y+z=a \\ y-z=b \\ x+y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=a \\ z=y-b \\ x=c-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c-2y+y+y-b=a \\ z=y-b \\ x=c-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c-b=a \\ z=y-b \\ x=c-y \end{cases}$$

$(a,b,c)=(2c-b,b,c)$

$=b(-1,1,0)+c(2,0,1)$

$Im f_2 = sev\langle(-1,1,0),(2,0,1)\rangle$

$f_4(x,y)=(y,0,x-7y,x+y)$

* $Ker f_4$: $f(x,y)=(0,0)$

$$\begin{cases} y=0 \\ x-7y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$Ker f_4 = 0$

f_4 est injective

* $Im f_4$:

$Y(a,b,c,d) \in Im f_4$

$\Leftrightarrow \exists X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq $f_4(X)=Y$

$$\begin{cases} y=a \\ a=b \\ x-7y=c \\ x+y=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=y \\ b=0 \\ c=x-7y \\ d-8a=c \end{cases}$$

$Y(a,b,c,d)=(a,0,d-8a,d)$

$=a(1,0,-8,0)+d(0,0,1,1)$

$Im f_4 = sev\langle(1,0,-8,0),(0,0,1,1)\rangle$

$z=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y$

$(x,y,z)=(x,y,-\frac{1}{2}x,\frac{3}{4}y)$

$=x(1,0,-\frac{1}{2})+y(0,1,\frac{3}{4})$

$Ker f = sev\langle(1,0,-\frac{1}{2}),(0,1,\frac{3}{4})\rangle$

$\dim Im f = 1$

$\Rightarrow \dim Ker f + \dim Im f = \dim E = 3$

$Im f$ sev de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow Im f = \mathbb{R}$.

$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f_2(x,y,z)=(2x+y+z, y-z, x+y)$

* $(x,y,z) \in Ker f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ x+y=0 \\ y=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=y \end{cases}$$

$X=y(-1,1,1)$ $Ker f = sev\langle\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$

* $(a,b,c) \in Im f \Leftrightarrow \exists X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq

$f_2(x,y,z)=(a,b,c)$.

$$\begin{cases} 2x+y+z=a \\ y-z=b \\ x+y=c \end{cases}$$

$Im f = sev\langle f_2(e_1), f_2(e_2), f_2(e_3)\rangle$

$= sev\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$f(e_1)-f(e_3)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=f(e_2)$

$Im f = sev\langle f(e_1), f(e_3)\rangle$

exosup.com page facebook

$g_1(P_1+P_2) = (X+1)(P_1+P_2)'$

$(X+1)(P_1'+P_2')$

$(X+1)P_1' + (X+1)P_2'$

$g_1(P_1) + g_1(P_2)$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$(\alpha P)' = \alpha P'$

$g_1(\alpha P) = (X+1)(\alpha P)'$

$= \alpha (X+1) P' = \alpha\, g_1(P)$

$g_2 = P + (1-X)P'$

$g_2(P_1+P_2) = (P_1+P_2) + (1-X)(P_1+P_2)'$

$= (P_1+P_2) + P_1'(1-X) + P_2'(1-X)$

$[P_1 + P_1'(1-X)] + [P_2 + (1-X)P_2']$

$= g_2(P) + g_2(P)$

$\alpha \in \mathbb{R}$: $g_2(\alpha P) = \alpha P + (1-X)\alpha P'$

$= \alpha [P + (1-X)P']$

$g_3 = (1-X)P' + 2P''$

$P \longmapsto (1-X)P'$ est linéaire

$P \longmapsto 2P''$ est linéaire

$g_3 = U + V$ somme de 2 appli linéaire est linéaire.

Rq : Dérivée est une application linéaire.

Ex 3 : $f : E \longmapsto F$

Kerf : noyau de f.

$\ker f = \{x \in E : f(x) = 0_E\}$

↳ sev de E

Imf sev de F $= \{y \in F \; y = f(x) \text{ ou } x \in E\}$

$f_1(x,y,z) = 2x - 3y + 4z = 0$

$X \in \ker f \Longleftrightarrow 2x - 3y + 4z = 0$

Rq 1 : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

linéaire si elle est de la forme

$X\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$f(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

Rq 2 : $f \; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$X \in \mathbb{R}^n \qquad f(X) \in \mathbb{R}^n$

$f(X) = (f_1(X), f_2(X) \dots f_m(X))$

est linéaire

Si $f_1, f_2 \dots f_n$ sont linéaire

Rq 3 : $\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ dim 1.

$f_6 = (|x|, 0)$

$X(x,y,z) \quad X'(x',y',z')$

$f_6(X+X') = f_6(x+x', y+y', z+z')$

$= (|x+x'|, 0)$

$f_6(X) + f_6(X') = (|x|, 0) + (|x'|, 0)$

$= (|x|+|x'|, 0)$

$|x+x'| \neq |x| + |x'|$.

Ex 2 :

$P \in \mathbb{R}_2[X]$ 2 polynome de degré ≤ 2

$P(X) = aX^2 + bX + C$.

$\mathbb{R}_2[X]$ ev de dim 3.

base : $\{1, X, X^2\}$.

$P \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow P' \in \mathbb{R}_1[X]$.

$\Rightarrow (X+1)P' \in \mathbb{R}_2[X]$.

Mq : g_1 est linéaire

$P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$(P_1+P_2)' = P_1' + P_2'$



exosup.com

page facebook